Révisions Maple pour Centrale – MP1 @ Lycée Saint Louis

Louis Jachiet – `sl@jachiet.com`

24 mai 2013

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A. Déterminer $ker(A^2)$ et $ker((A-2I_4)^2)$ et montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont complémentaires.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$

Exercice 3

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les matrices C telles que $A = CB$.

Exercice 4

Soit pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ le système différentiel (E_a) tel que $x'' = -x + x^2$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = a$.

1. Tracer les courbes de quelques solutions de (E_a) avec Maple
2. Donner les points critiques de $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x^3$
3. Tracer les lignes de niveau de f
4. Montrer que si x est une solution de (E_a), alors $f(x, x')$ est une fonction constante de valeur a^2.

Exercice 5

Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(X + \frac{1}{X}) = X^n + \frac{1}{X^n}$. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 6

Soit la courbe $\left\{ \begin{array}{ll} x(t) & = cos^3(t) \\ y(t) & = sin^3(t) \end{array} \right.$

1. Tracer la courbe
2. Étudier ses symétries
3. Calculer sa longueur et son aire

Exercice 7

Soient les points :

$$A(0, 1, -6) \qquad B(1, 2, 3) \qquad C(-1, 0, 7) \qquad D(2, 4, -5)$$

Donner le centre et le rayon de la sphère passant par ces 4 points.

Exercice 8

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & \sin(a) & \sin(2a) \\ \sin(a) & 0 & \sin(2a) \\ \sin(2a) & \sin(a) & 0 \end{pmatrix}$$

1. M_a est-elle diagonalisable ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer M_a^k

Exercice 9

Soient les points $A(1,0)$ et $B(-1,0)$ et pour tout point $M(x,y)$ du plan $f(M) = AM + BM - OM$.

1. Exprimer cette fonction en coordonnées cartésiennes, puis la transformer en coordonnées polaires (définir $f(x,y)$ et $g(r,\theta)$)
2. Tracer les lignes de niveau de f à l'aide de la fonction `contourplot`
3. Calculer le gradient de f
4. Déterminer les points où f atteint son minimum.

Exercice 10

1. Programmer le procédé de Gram-Schmidt sur une matrice réelle de taille 4.

Exercice 11

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice A_n telle que $A_{i,n-i+1} = 1$ et $A_{i,j} = 0$ sinon. Étudier ses éléments propres sur plusieurs exemples et conjecturer.

Exercice 12

Soit la courbe paramétrée C définie par :

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$

1. Tracer C
2. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à C en $M(t) = (x(t), y(t))$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la tangente à C en $M(t)$ coupe C en les points $M(u)$ et $M(v)$
4. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $OM(u)M(v)$.

Exercice 13

Déterminer les complexes z tels que $\frac{z^2}{2z+3i}$ soit imaginaire pur et les repésenter dans le plan complexe.