1 Classe AC

Définition 1. *Un circuit booléen avec n bits d'entrée est un graphe orienté acyclique (DAG) où les feuilles sont les n nœuds représentant l'entrée, la sortie est l'unique nœud dont le degré d'entrée est nul et chaque nœud est soit un nœud $\wedge$ ou $\vee$ (qui peuvent être d'arité quelconque) soit un nœud $\neg$ (unaire). Étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$ de taille n et un circuit dont la taille d'entrée est n, on peut évaluer le circuit sur w en remplaçant la i-ème feuille d'entrée par $\top$ quand $w_i = 1$ et $\bot$ quand $w_i = 0$.*

Définition 2. *On dit qu'une* famille de circuits $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *accepte un langage L quand pour chaque $n \in \mathbb{N}$, C_n a n bits d'entrée et accepte $\{w \in L \mid |w| = n\}$.*

Définition 3. *On définit la classe AC^i comme la classe des problèmes de décision acceptés par un famille de circuits booléens $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dont la taille du circuit est polynomiale et dont la profondeur est de taille $O(log(n)^i)$, c'est à dire qu'il existe k tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la profondeur de C_n est bornée par $log(n^i) \times k$. La taille de C_n est limitée par $P(n)$ pour un certain P.*

Question 1. Justifier pourquoi l'on ne s'intéresse qu'aux circuits de taille polynomiale (et non pas exponentielle ou illimitée).

Question 2. Montrer que le problème de décider la parité du nombre de 1 dans l'entrée est dans AC^1. Le problème de la parité correspond au langage $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \text{ est pair}\}$.

Question 3. Montrer que le problème de l'addition est dans AC^0. Pour cela, exhiber une famille de circuit de profondeur bornée qui accepte les mots $w = abc$ avec $|a| = |b| = |c|$ et $a + b = c$ (a, b et c sont en représentation binaire par exemple en petit boutien).

Question 4. Montrer que le problème de la multiplication est dans AC^1. Pour cela, trouver un famille de circuit qui accepte les mots $w = abc$ avec $2|a| = 2|b| = |c|$ et $a \times b = c$ (a, b et c sont en représentation binaire par exemple en petit boutien).

Question 5. Montrer que tout langage régulier sur $\{0,1\}$ est AC^1.

2 Classe NC

Définition 4. *On note NC^i la classe des problèmes de décision acceptés par une famille de circuits booléens $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'arité des portes $\vee$ et $\wedge$ est limitée à deux et où la famille de circuits est de profondeur $O(ln(n)^i)$ avec une taille polynomiale.*

Question 6. Montrer que pour tout i nous avons l'inégalité $NC^i \subseteq AC^i \subseteq NC^{i+1}$.

Question 7. Montrer que $NC^0 \neq AC^0$.

2.1 Classe TC

Définition 5. *La classe TC^0 correspond à la classe des problèmes de décision acceptés par une famille de circuits où les portes sont $\neg$ ainsi que des portes de type $T_k(x_1, \ldots, x_n)$ avec $T_k(x_1, \ldots, x_n) = |\{i \mid x_i = \top\}| \geq k$*

Question 8. Montrer que l'on peut faire les portes $\wedge$, $\vee$ et MAJORITÉ avec MAJORITÉ$(x_1, \ldots, x_n) = \top$ quand la moitié de ses entrées sont $\top$ sans changer la profondeur de circuit.

Question 9. Montrer qu'à l'inverse TC^0 correspond aussi à la classe des problèmes de décision acceptés par des circuits de profondeur bornée avec les portes $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et MAJORITÉ (d'arités non bornées).

Question 10. Montrer $TC^0 \subseteq NC^1$

Question 11. Montrer que le problème de parité est dans TC^0.

Question 12. Montrer que le problème de la multiplication est dans TC^0.