1 Réduction de 3-SAT à CNF-SAT

Une formule *CNF* (pour *Conjunctive Normal Form*) est la donnée d'un ensemble de variables $x_1, \dots, x_n$ et d'un ensemble de clauses $C_1, \dots, C_k$ où chaque clause est une disjonction de littéraux (un littéral est soit une variable x_i soit la négation d'une variable $\neg x_i$). Pour tout $1 \leq j \leq k$, on a donc $C_j = \bigvee_i v_i^j$ où $v_i^j = x_l$ ou $v_i^j = \neg x_l$ pour un certain l.

Une formule CNF est satisfiable s'il existe une assignation des variables $x_1, \dots, x_n$ à vrai ($\top$) ou faux ($\perp$) telle que chaque clause soit satisfaite (c'est à dire que pour chaque clause au moins un de ses littéraux est vrai). Du point de vue logique une formule CNF est donc une formule de la forme : $\exists x_1, \dots x_n \in \{\top, \perp\}^n : \bigwedge_j \left(\bigvee_i v_i^j\right)$.

Définition 1. *Le problème* CNF-SAT *est celui de décider si une formule CNF est satisfiable.*

Définition 2. *Le problème* k-SAT *est le problème CNF-SAT où l'on impose que chaque clause contienne au plus k littéraux.*

Exercice 1. Montrer que les problèmes *CNF-SAT* et *k-SAT* (pour tout $k \in \mathbb{N}$)) sont dans $\mathcal{NP}$.

Exercice 2. Montrer que la formule $(v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4)$ est satisfaite seulement quand il existe l tel que $(v_1 \vee v_2 \vee l) \wedge (\neg l \vee v_3 \vee v_4)$ est aussi satisfaite (où l est une variable qui n'apparaît pas dans les littéraux $v_1, \dots, v_4$).

Exercice 3. Montrer que 3-SAT est $\mathcal{NP}$-complet. Pour cela, partir du problème CNF-SAT (qui est supposé $\mathcal{NP}$-complet) et montrer que pour toute formule CNF φ on peut trouver une formule φ' qui est satisfiable si et seulement si φ l'est avec $|\varphi'|$ de taille polynomiale en $|\varphi|$ et où chaque clause de φ' contient au plus 3 littéraux.

Définition 3. *Une formule DNF (pour* Disjunctive Normal Form*) est la donnée d'un ensemble de variables $x_1, \dots, x_n$ et d'une disjonction de clauses où chaque clause est une conjonction de littéraux. En forme logique une formule DNF est donc $\exists x_1, \dots, x_n \in \{\perp, \top\}^n : \bigvee_j (\bigwedge_i v_i^j)$*

Exercice 4. Le problème DNF-SAT est celui de la satisfiabilité d'une formule DNF. Le problème DNF-SAT est-il dans $\mathcal{NP}$? co-$\mathcal{NP}$? $\mathcal{P}$?

2 Réduction de 3-SAT à 3-coloriage

Définition 4. *Étant donné un graphe $G = (V, E)$, G est dit k-coloriable si l'on peut colorier ses nœuds avec k couleurs de telle façon que deux nœuds reliés n'ont jamais la même couleur. Formellement, la k-coloriabilité de G s'exprime de la façon logique suivante $\exists (c : V \to \{1, \dots, k\})\ \forall (i, j) \in E\ : c(i) \neq c(j)$.*

Exercice 5. Montrer que pour tout k fixé, le problème du k-coloriage est dans $\mathcal{NP}$.

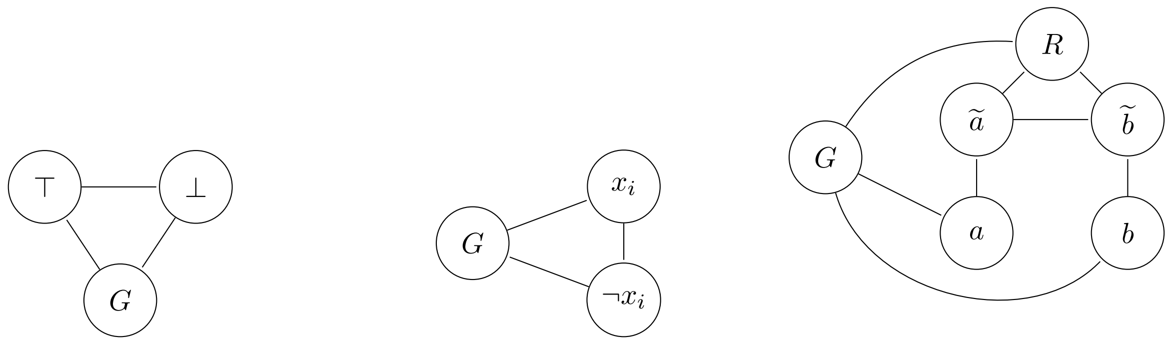
Exercice 6. Montrer que si le problème de la $k+1$-coloriabilité est dans $\mathcal{P}$ alors celui de la k-coloriabilité l'est aussi.

Nous allons maintenant monter que 3-SAT se réduit à 3-coloriage. Pour cela nous allons introduire plusieurs gadgets.

Gadget de couleurs Dans notre graphe, les trois couleurs vont représenter soit vrai ($\top$), faux ($\perp$) ou autre (G pour Ground). Pour encoder ces couleurs notre premier gadget est d'inclure le graphe de la figure 1a. Nous brancherons ensuite souvent des nœuds à G ou $\perp$ pour interdire ces couleurs, il s'agira toujours de ces mêmes nœuds G et $\perp$ (le gadget n'est présent qu'une seule fois même si ses nœuds sont utilisés dans les autres gadgets).

Exercice 7. Trouver un gadget qui impose qu'un nœud soit colorié de la même couleur que $\top$.

Gadget littéraux Pour chaque variable x_i nous allons créer deux nœuds : x_i et $\neg x_i$ que nous allons brancher à G et entre eux selon le schéma de la figure 1b.



(a) Gadget de couleur (b) Gadget de littéraux (c) Gadget OR

Gadget OR Supposons que a et b représentent des valeurs booléennes (ce que l'on force en les branchant à G), le gadget OR est celui de la figure 1c (le G est celui du premier gadget).

Exercice 8. Montrer que dans tout coloriage du gadget, la couleur de R est la même que celle de a ou la même que celle de b. Et montrer que si on limite le graphe à ce gadget, alors R peut être colorié par la couleur de a ou par celle de b.

Exercice 9. Trouver un gadget qui réalise le OR entre trois valeurs booléennes a, b, c (représentées par des nœuds coloriés de la même couleur que $\top$ ou $\bot$).

Preuve finale **Exercice 10.** Trouver un gadget pour vérifier chacune des clauses.

Exercice 11. Présenter une réduction polynomiale de 3-SAT au 3-coloriage.

3 Miscellanées

Exercice 12. Le problème du 2-coloriage est-il dans $\mathcal{NP}$? co-$\mathcal{NP}$? $\mathcal{P}$?

Exercice 13. Montrer que SAT se réduit à 3-SAT (c'est à dire la satisfiabilité de formules booléennes composées de $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et de variables).

Exercice 14. Dans quelles classes se trouve le problème 2-SAT ?

4 Problème de clique

Définition 5. *Le problème de la clique consiste à décider si étant donné un graphe G et un entier k que le graphe G contient une k-clique (un ensemble de k nœuds tous reliés les uns aux autres).*

Exercice 15. Montrer que le problème de la clique est $\mathcal{NP}$-complet.

Suggestion : trouver une réduction avec 3-SAT. Étant donné $\bigvee_j (\bigwedge_i v_i^j)$ on créé un nœud par v_i^j (si un même littéral apparaît dans plusieurs clauses, alors il est présent plusieurs fois).