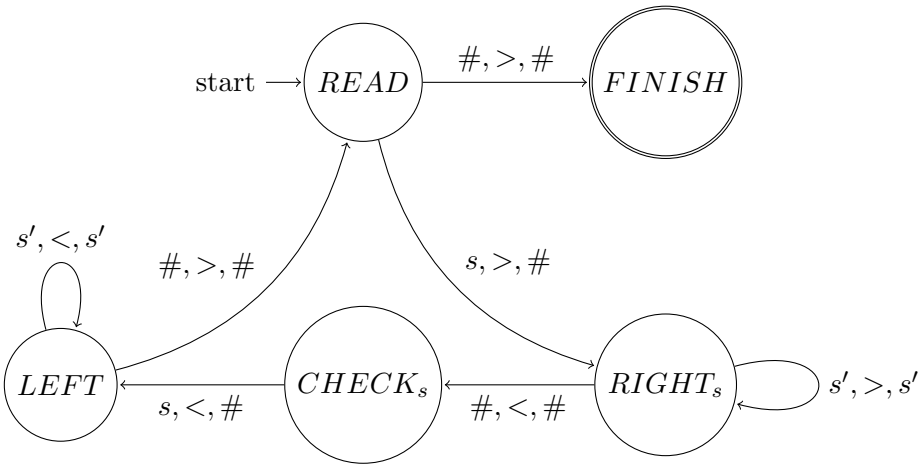
1 Exemples de Machines de Turing

Exercice 1. Soit Σ un alphabet de la bande (telle qu'elle est en entrée) avec # marquant la fin du mot d'entrée. Donner des Machines de Turing pour les langages suivants :

— $L_1 = \{y\ rev(y) \mid y \in \Sigma^*\}$
— $L_2 = \{yy \mid y \in \Sigma^*\}$
— L^* pour L un langage récursivement énumérable reconnu par une machine de Turing M qui ne lit pas avant le premier caractère et efface le contenu de sa bande avant de terminer.

Solution 1.

1. Pour L_1, les états sont : $FINISH$, $READ$, $LEFT$, $RIGHT_s$ et $CHECK_s$ pour $s \in \Sigma$. $FINISH$ is the end state, $READ$ the initial. The machine reads a letter s, go to the right compare with the rightmost letter and goes back to the beginning.



2. Pour L_2, notre solution va insérer des marqueurs D et M. Au début on met les deux à la fin puis tant que D n'est pas au début on décale M de un et D de deux.

   Dans la suite on a $R_i \xrightarrow{s,>,s} R_i$ et $L_i \xrightarrow{s,<,s} L_i$. On considère le cas du mot vide à part $Init \xrightarrow{\#,>,\#} OK$ et à deux lettres $Init \xrightarrow{x,>,x} \xrightarrow{x,>,x} \xrightarrow{\#,>,\#} OK$.

   On initialise en allant à la fin et $wxy\#$ devient $wDxMy\#$:

   $Init \xrightarrow{s,>,s} R_1 \xrightarrow{x,>,D} I_2(x) \xrightarrow{y,>,x} I_3(y) \xrightarrow{\#,>,M} I_4(y) \xrightarrow{\#,<,y} L_{pousse}$

   ensuite on pousse M une fois et D deux ($w_1xyDw_2zMw_3$ devient $w_1Dxyw_2Mzw_3$) :

   $L_{pousse} \xrightarrow{M,<,z} P_1(z) \xrightarrow{z,<,M} L_2 \xrightarrow{D,<,y} P_2(x,y) \xrightarrow{y,<,x} P_3(x) \xrightarrow{x,<,D} T_{debut}$

   T_{debut} va tester si on est début si c'est le cas on testera que notre mot est de la forme $DyMy\#$ si ce n'est pas le cas il faut retourner à gauche et repousser donc $T_{debut} \xrightarrow{\#,>,\#} Check$ et $T_{debut} \xrightarrow{s,>,s} R_{pousse} \xrightarrow{M,<,z} P_1(z)$.

   Enfin pour vérifier on va simplement remplacer chaque lettre s vue à gauche par un marqueur D et à droite par M.

   $Check \xrightarrow{s,>,D} R_{check}(s) \xrightarrow{M,>,M} R_{check2}(s) \xrightarrow{s,<,M} L_{debut} \xrightarrow{D,>,D}, Check$

   Enfin on a une condition échappatoire $Check \xrightarrow{D,>,D} B \xrightarrow{M,>,M} B \xrightarrow{\#,>,\#} OK$

3. Pour L^* on a tester toutes les coupures $w = x_1x_2 \dots x_n$ et transformer w en $x_1\$x_2 \dots \$x_n$ puis lancer M sur x_n, si ça termine en OK alors lancer M sur x_{n-1} etc.

   Pour découper la bande $R_{init} \xrightarrow{s,>,s} R_{init} \xrightarrow{s,>,\$} M_s \xrightarrow{u,>,s} M_u \xrightarrow{\#,<,u} Ret \xrightarrow{s,<,s} Ret \xrightarrow{\$,>,\$} R_{init}$

   Pour revenir au dernier \$ quand on atteint la fin : $R_{init} \xrightarrow{\#,<,\#} Last\$ \xrightarrow{s\neq\$,<,s} Last\$$

   Pour reconnaître via M : $Last\$ \xrightarrow{\$,>,\$} M_init$ et continuer si besoin $M_{OK} \xrightarrow{\#,<,\#} \xrightarrow{\$,<,\#} Last\$$ ou finir si on a tout reconnu $M_{OK} \xrightarrow{\#,<,\#} \xrightarrow{D,>,\#} OK$

Exercice 2. On suppose que les entiers sont écrits en binaire. Les entrées sorties sont faites sur la bande qui contient k nombres. Pour k nombres, la bande est $((0^*1^*)^*\#)^k$ (k fois des 0 et 1 suivis de #). Décrire des machines de Turing pour réaliser les opérations suivantes (à chaque fois la bande de fin doit contenir un nombre, c'est à dire des 0 et des 1 suivis de #) :

1. passer de petit-boutien à grand-boutien (et vice-versa) ;
2. calculer la somme de deux entiers ;
3. étant donnés deux machines M_1 et M_2 qui calculent deux fonctions f_1 et f_2, donner un machine qui calcule $f_2 \circ f_1$.

Solution 2.

1. Cas du mot vide $init \xrightarrow{\#,>,\#} OK$
   Cas général on va à la fin, $init \xrightarrow{s,>,s} init \xrightarrow{\#,<,\$} Push$
   Notre tête est à la fin sur la dernière lettre, on va pousser les lettres vers le début, $Push \xrightarrow{u,<,\$} P_u \xrightarrow{s,<,u} P_s \xrightarrow{\#,>,\#} A_s$
   A_s va poser s après le premier \$ rencontré (notez qu'on en avait laissé deux notre tête est sur la dernière lettre non retournée) : $A_s \xrightarrow{u,>,u} A_s \xrightarrow{\$,<,s} Push$
   Maintenant quand $Push$ lit un \$ c'est qu'on a fini de retourner, il suffit de supprimer ce \$ en poussant les lettres depuis la fin : $Push \xrightarrow{\$,>,\#} End \xrightarrow{s,>,s} End \xrightarrow{\#,<,\#} Push_2 \xrightarrow{s,<,s} P_s^2 \xrightarrow{u,<,s} P_u^2 \xrightarrow{\#,>,u} OK$.
2. On suppose que les nombres sont en petit-boutien de la forme $x_1 + x_2$: on décale pour mettre de la forme $\$x_1 + x_2$ et à chaque fois on va transformer pour ce soit de la forme $w\$w_1 0^{|w|} + w_2$ avec $|w_i| + |w| = |x_i|$.
   $init \xrightarrow{s,>,\$} push_s \xrightarrow{u,>,s} push_u \xrightarrow{\#,<,u} beg \xrightarrow{s,<,s} beg \xrightarrow{\$,>,\$} ha_0$
   on est retourné au début on peut faire notre half-adder ha_i pour $i \in \{0, 1\}$:
   $ha_i \xrightarrow{s,>,s} ha_{s+i}^2 \xrightarrow{u,>,u} ha_{s+i}^2 \xrightarrow{+,>,0} ha_{s+i}^3 \xrightarrow{v,<,+} ha_{s+v+i}^4 \xrightarrow{u,<,u} ha_{s+v+i}^4 \xrightarrow{\$,>,(s+v+i)mod2} ha_{(s+v+i)\div 2}$.
   La condition d'échappement de ha_i est $ha_i \xrightarrow{\#,>,i} OK$

2 Stabilité des langages récursivement énumérables, décidables, etc.

Soient A, B des langages décidables et C et D des langages récursivement énumérables.

Exercice 3. Pour chacune des paires (X, Y) parmi (A, B), (B, C), (C, D) et (D, A) est-ce que $L_{X,Y}$ est nécessairement décidable ou énumérable pour les langages suivants :

1. $L_{X,Y} = X \cap Y$
2. $L_{X,Y} = X \cup Y$
3. $L_{X,Y} = X \setminus Y$

Solution 3. $X \cap Y$ est nécessairement décidable quand X et Y le sont et énumérables quand X et Y le sont. Pareil pour $X \cup Y$.

$X \setminus Y$ est décidable si X et Y le sont mais n'est nécessairement énumérable que dans le cas Y décidable et X énumérable.

Exercice 4. Montrer que si X et $\bar{X}$ sont énumérables alors X est décidable.

Solution 4. Pour décider de $m \in X$, on énumère simultanément X et $\bar{X}$ et dès que l'on trouve $m \in X$ ou $m \in \bar{X}$ on peut répondre. Comme les deux tests tournent simultanément, la partie X termine forcément quand $m \in X$ et la partie $\bar{X}$ termine sinon.

3 Machines de Turing exotiques

— Une machine à k piles est une machine de Turing avec une bande d'entrée et k bandes de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des piles ;
— une machine à file est une machine de Turing avec une bande d'entrée et une bande de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des files : on peut ajouter des éléments part la gauche et les lire par la droite ;
— une machine à k compteurs est une machine à k piles où l'alphabet de pile est $\{B, Z\}$ et Z est un symbole de fond de pile. Un entier i peut-être stocké dans une pile en comptant le nombre de symboles B. On peut incrémenter, décrémenter le compteur et tester si le compteur est vide (symbole Z en tête de pile).

1. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux piles.
2. Montrer qu'une de Turing est équivalente à une machine à une file.
3. Montrer qu'une machine à une pile peut-être simulée par une machine à deux compteurs.
4. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux compteurs.

Solution 4.

1. L'idée c'est de stocker l'état de la bande sur deux piles (G, D). Quand on faire bouger la tête de la MT vers la droite on lit dans D et on écrit dans G et inversement pour aller à gauche on lit dans G et écrit dans D.
2. L'idée c'est qu'on stocke l'état $m_1 \dots m_k m_{k+1} \dots m_n$ sous la forme de la file $m_k \dots m_1 \# m_n \dots m_{k+1}$ quand on est sur l'élément m_k et qu'on veut lire la bande vers la droite. Quand on veut lire vers la gauche on ajoute un deuxième symbole T pour dire qu'il faut faire le tour de la file et on lit les éléments jusqu'à trouver ce T, le dernier élément alors lu correspond à l'élément strictement à gauche.
3. L'idée c'est qu'une pile $p_0 \dots p_n$ dont l'alphabet est $\{B, Z\}$ peut être vu comme un nombre $\Sigma_{p_k=B} 2^k$. Notre compteur C_1 va donc stocker l'état de la pile de cette façon. Pour lire le dernier élément de la pile il faut diviser C_1 par deux. Pour cela on répète tant que nécessaire prendre deux éléments dans C_1 pour en mettre un dans C_2. À la fin il nous reste un ou zéro élément dans C_1, ça nous dit si l'état du haut de la pile est B ou Z.

   On vide alors l'éventuel élément restant dans C_1 puis on déplace le contenu de C_2 dans C_1 en répétant tant que possible prendre un dans C_2 et le mettre dans C_1.

   Pour empiler un élément on multiplie C_1 par deux (copier C_1 dans C_2 puis répéter "prendre un dans C_2 et mettre deux dans C_1") puis on ajoute un si l'élément à ajouter est B.
4. On va produire une machine à 4 compteurs avec une machine à deux compteurs. Pour cela C_1 va contenir ${p_1}^{d_1} {p_2}^{d_2} {p_3}^{d_3} {p_4}^{d_4}$ avec $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$. Pour incrémenter un compteur i on multiplie par p_i, pour décrémenter on divise par p_i et pour tester si un compteur est vide on tester le résultat de $C_1 mod p_i$.

   Avec ces 4 compteurs on en dédit deux pour faire une pile et deux autres pour faire une deuxième pile. Une machine avec deux piles pouvant simuler une MT, le résultat est obtenu.