1 Grammaires non contextuelles

Exercice 1. Considérons la grammaire suivante sur l'alphabet $\{x, y, +, -, *\}$:

$$E \to +EE \mid *EE \mid -EE \mid x \mid y$$

1. Trouver les dérivations gauches (*leftmost*) et droites (*rightmost*) ainsi qu'un arbre de dérivation pour la chaîne $+*-xyxy$.
2. Prouver que cette grammaire est non-ambiguë.
3. Trouver un automate à pile pour cette grammaire.

Exercice 2. En utilisant le lemme d'Ogden ou le lemme de pompage, montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques :

1. $\mathcal{L}_0 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$
2. $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2n\}$
3. $\mathcal{L}_2 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathcal{L}_3 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

2 Forme Normale de Chomsky (CNF)

Definition 1. *On rappelle qu'une grammaire est sous forme normale de Chomsky quand toutes ses productions sont de la forme :*

$$A \to BC \quad ou \quad A \to a \quad ou \quad S \to \epsilon$$

avec $B \neq S$ et $C \neq S$ où S est le symbole initial.

Exercice 3. Soit $G = (\Sigma, N, P, S)$ un grammaire algébrique. On suppose que S n'apparaît jamais à droite d'une règle de production, comment éliminer toutes les transitions $A \to \epsilon$ (sauf éventuellement $S \to \epsilon$) d'une grammaire ?

Exercice 4. Proposer des règles pour transformer les productions suivantes en CNF (on suppose que S n'apparaît pas) :

1. $A \to bC$
2. $A \to Bc$
3. $A \to bc$
4. $A \to BCD$
5. $A \to \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ avec $\alpha_i \in \Sigma \cup N$
6. $A \to \alpha_1 \ldots \alpha_p$ avec $p \geq 3$
7. $A \to B$

Exercice 5. Proposer une grammaire CNF équivalente à la grammaire suivante :

$$\begin{array}{ccrcl} S & \to & CSC & \mid & aB \\ C & \to & B & \mid & S \\ B & \to & b & \mid & \epsilon \end{array}$$

Exercice 6. Proposer un algorithme de temps polynomial (en la taille cumulée du mot et de la grammaire) qui reconnaît si un mot appartient à une grammaire CNF.