

## 1 Lemme d'Arden

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  des langages rationnels, montrez que si  $\epsilon \notin \mathcal{A}$  alors  $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$  admet un unique langage  $\mathcal{X}$  solution. Exprimez cette solution en fonction de  $a$  (resp.  $b$ ) une expression régulière qui reconnaît  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ).

*Conseil pour aborder cet exercice :*

1. trouvez une première solution et prouvez que c'en est bien une ;
2. prouvez que toute solution contient votre première solution ;
3. prouvez que votre première solution contient toute solution.

## 2 Lemme de pompage (ou lemme de l'étoile)

**Exercice 2.** Les langages suivants sont-ils réguliers ? Justifiez.

1.  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2.  $\{a^m b^n \mid n \equiv m \pmod{d}\}$  pour un  $d \in \mathbb{N}$  donné.
3.  $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$
4.  $\{a^{P(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$  pour  $P \in \mathbb{N}[X]$  donné.

## 3 Puzzles

**Exercice 3.** Soient  $x$  et  $y$  deux mots tels que  $xy = yx$ , que pouvez-vous dire de la forme de  $x$  et  $y$  ?

**Exercice 4.** Soient  $(p, q) \in \mathbb{N}^*$ , et  $\mathcal{L}$  un langage régulier est-ce que  $\frac{p}{q}\mathcal{L} = \left\{ u \mid \exists v : uv \in \mathcal{L} \text{ et } |u| = \frac{p}{q}|uv| \right\}$  est nécessairement régulier ?

## 4 Lemme d'Arden généralisé

**Définition 1.** Un monoïde est une structure algébrique  $(E, \odot, e)$  telle que :

- (loi interne) Pour  $x, y \in E^2$ ,  $x \odot y \in E$
- (associative) Pour  $x, y, z \in E^3$ ,  $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
- (élément neutre) Pour  $x \in E$ ,  $x \odot e = e \odot x = x$

**Définition 2.** Un demi-anneau est une structure algébrique  $(E, +, \times, 0, 1)$  telle que :

- $(E, +, 0)$  est un monoïde commutatif ( $a + b = b + a$ ) ;
- $(E, \times, 1)$  est un monoïde ;
- $\times$  est distributif pour  $+$  ( $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  et  $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ ) ;
- $0$  est absorbant pour  $\times$  (i.e.  $0 \times a = a \times 0 = 0$ )

**Exercice 5.** Remarquez que  $(\mathcal{L}_\Sigma, \cup, /, \emptyset, \epsilon)$  est un demi-anneau où :

- $\mathcal{L}_\Sigma$  est l'ensemble des langages réguliers sur l'alphabet fini  $\Sigma$  ;
- $/$  est la concaténation  $X/Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$  ;
- $\cup$  est l'union ;
- $\emptyset$  est le langage vide ;
- $\epsilon$  est le langage contenant uniquement le mot vide.

Soit  $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$  l'ensemble des matrices carrés de taille  $n$  sur le demi-anneau  $(\mathcal{L}_\Sigma, /, \cup, \emptyset, \epsilon)$  avec

- $(M + N)_{i,j} = M_{i,j} \cup N_{i,j}$  ;
- $(M \times N)_{i,j} = \bigcup_{1 \leq k \leq n} M_{i,k} / N_{k,j}$  ;

- $0_{i,j} = \emptyset$
- $1_{i,j} = \begin{cases} \epsilon & i = j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
- $M^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} M^i$

Remarquez que  $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$  est aussi un demi-anneau.

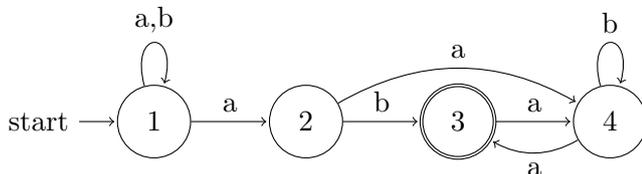
*Note : Tout demi-anneau peut se transformer de la même manière en un demi-anneau de matrices.*

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$  avec  $\forall i, j, \epsilon \notin A_{i,j}$  et  $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$  un vecteur de taille  $n$  montrez qu'il n'existe qu'une unique solution  $\mathcal{X} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$  à  $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$  (i.e.  $\forall i : \mathcal{X}_i = (\bigcup_j A_{i,j}/\mathcal{X}_j) \cup \mathcal{B}_i$ ).

**Exercice 7.** (*Pivot de Gauss*) Étant donné  $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$  et  $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$  montrez que si  $n > 1$  les langages  $(\mathcal{A}^*\mathcal{B})_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  peuvent s'exprimer sous la forme  $\mathcal{A}'^*\mathcal{B}'$  pour  $\mathcal{A}' \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma), \mathcal{B}' \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ .

**Exercice 8.** En déduire un algorithme permettant de retrouver une expression régulière à partir d'un automate.

**Exercice 9.** Donner l'expression régulière pour l'automate suivant :



## 5 Monoïde d'un langage

**Definition 3.** Étant donné un alphabet ambiant  $\Sigma$  et un langage  $\mathcal{L}$  (pas nécessairement régulier) on note  $\mu_{\mathcal{L}}$  le morphisme syntaxique de  $\mathcal{L}$  défini ainsi :  $\mu_{\mathcal{L}}(u) = \{(x, y) \in \Sigma^{*2} \mid xuy \in \mathcal{L}\}$ .

**Exercice 10.** Montrer que  $\mu_{\mathcal{L}}$  est compatible avec la concaténation c'est à dire  $\forall u, v, w : \mu_{\mathcal{L}}(v) = \mu_{\mathcal{L}}(w) \Rightarrow (\mu_{\mathcal{L}}(vu) = \mu_{\mathcal{L}}(wu)) \wedge (\mu_{\mathcal{L}}(wv) = \mu_{\mathcal{L}}(uw))$ .

**Exercice 11.** Pour chaque élément  $e \in \mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$  on choisit un représentant  $r(e)$  tel que  $\mu_{\mathcal{L}}(r(e)) = e$ , et on définit  $u \odot v = \mu_{\mathcal{L}}(r(u)) \odot \mu_{\mathcal{L}}(r(v)) = \mu_{\mathcal{L}}(r(u)r(v))$ .

Justifier que :

- $\odot$  ne dépend pas du choix de  $r$ .
- la structure  $(\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*), \odot, \mu_{\mathcal{L}}(\epsilon))$  induite par  $\mu_{\mathcal{L}}$  est bien un monoïde

et donc  $\mu_{\mathcal{L}}$  est bien un morphisme entre le monoïde libre sur  $\Sigma$  et le monoïde induit par  $\mu_{\mathcal{L}}$ .

*Note : tout monoïde  $(M, \odot, e)$  compatible avec une fonction  $\mu$  induit une structure de monoïde sur  $\mu(M)$ .*

**Exercice 12.** Montrer que  $\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$  est fini quand  $\mathcal{L}$  est régulier.

**Exercice 13.** Montrer que si  $\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$  est fini alors  $\mathcal{L}$  est régulier.

**Exercice 14.** À quoi ressemble le monoïde syntaxique des mots bien parenthésés ?