

Analyse

1 Développement limité

Soit :

$$f(x) = \cos(x) - \frac{a + bx^2 + cx^4}{1 + dx^2 + ex^4}$$

► **Question 1** Déterminer les coefficients a, b, c, d, e

tels que le développement de f au voisinage de 0 soit de l'ordre le plus élevé possible (i.e. pour que son développement limité en 0 soit de la forme $\lambda x^k + O(x^{k+1})$ avec k le plus grand possible).

► **Question 2** Donner alors un équivalent de f .

2 Suite

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2 - u_n}$

► **Question 3** Tracer la fonction associée. La suite peut-elle converger ?

► **Question 4** Calculer les 30 premiers termes de la suite pour divers u_0 . Que peut-on conjecturer ?

3 Équation différentielle

► **Question 5** Tracer le graphe de la solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \sin(y(x)) = 0$$

vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0.5$

► **Question 6** Déterminer la plus petite valeur strictement positive annulant cette solution

4 Série de Fourier

On pose $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} - \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$

► **Question 7** g est-elle continue ?

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ch(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi; \pi]$.

► **Question 8** Représenter f sur $[-3\pi; 3\pi]$ pour $\alpha = 2$;

► **Question 9** Calculer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

► **Question 10** Donner une expression de g comme somme de séries de fonction rationnelles.

5 Équation différentielle 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x < -2) = x + 2$$

$$f(-2 \leq x < 1) = 1/2$$

$$f(1 \leq x < 2) = x^2/2$$

$$f(x \geq 2) = x - 1$$

► **Question 11** Calculer $f'(x)$, une primitive de f , intégrer f sur $[0; 2\pi]$.

► **Question 12** Résoudre $y'(x) + y(x) = f(x)$.

6 Série de Fourier 2

Soit la fonction f_0 2π périodique $f_0(x) = |\sin(x/2)|$

► **Question 13** Calculer les coefficients de Fourier de f_0 .

7 Pivot de Gauss

► **Question 14** Implémenter une fonction *inverse* qui inverse une matrice (supposée carrée et inversible) à l'aide d'un pivot de Gauss.

► **Question 15** En réutilisant ce pivot de Gauss, écrire une fonction *determinant* qui calcule le déterminant d'une matrice (supposée carrée)