

## 1 Classe AC

**Définition 1.** Un circuit booléen avec  $n$  bits d'entrée est un graphe orienté acyclique (DAG) où les feuilles sont les  $n$  nœuds représentant l'entrée, la sortie est l'unique nœud dont le degré d'entrée est nul et chaque nœud est soit un nœud  $\wedge$  ou  $\vee$  (qui peuvent être d'arité quelconque) soit un nœud  $\neg$  (unaire). Étant donné un mot  $w \in \{0, 1\}^*$  de taille  $n$  et un circuit dont la taille d'entrée est  $n$ , on peut évaluer le circuit sur  $w$  en remplaçant la  $i$ -ème feuille d'entrée par  $\top$  quand  $w_i = 1$  et  $\perp$  quand  $w_i = 0$ .

**Définition 2.** On dit qu'une famille de circuits  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  accepte un langage  $L$  quand pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n$  a  $n$  bits d'entrée et accepte  $\{w \in L \mid |w| = n\}$ .

**Définition 3.** On définit la classe  $AC^i$  comme la classe des problèmes de décision acceptés par un famille de circuits booléens  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dont la taille du circuit est polynomiale et dont la profondeur est de taille  $O(\log(n)^i)$ , c'est à dire qu'il existe  $k$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la profondeur de  $C_n$  est bornée par  $\log(n)^i \times k$ . La taille de  $C_n$  est limitée par  $P(n)$  pour un certain  $P$ .

**Question 1.** Justifier pourquoi l'on ne s'intéresse qu'aux circuits de taille polynomiale (et non pas exponentielle ou illimitée).

**Question 2.** Montrer que le problème de décider la parité du nombre de 1 dans l'entrée est dans  $AC^1$ . Le problème de la parité correspond au langage  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \text{ est pair}\}$ .

**Question 3.** Montrer que le problème de l'addition est dans  $AC^0$ . Pour cela, exhiber une famille de circuit de profondeur bornée qui accepte les mots  $w = abc$  avec  $|a| = |b| = |c|$  et  $a + b = c$  ( $a$ ,  $b$  et  $c$  sont en représentation binaire par exemple en petit boutien).

**Question 4.** Montrer que le problème de la multiplication est dans  $AC^1$ . Pour cela, trouver un famille de circuit qui accepte les mots  $w = abc$  avec  $2|a| = 2|b| = |c|$  et  $a \times b = c$  ( $a$ ,  $b$  et  $c$  sont en représentation binaire par exemple en petit boutien).

**Question 5.** Montrer que tout langage régulier sur  $\{0, 1\}$  est  $AC^1$ .

## 2 Classe NC

**Définition 4.** On note  $NC^i$  la classe des problèmes de décision acceptés par une famille de circuits booléens  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où l'arité des portes  $\vee$  et  $\wedge$  est limitée à deux et où la famille de circuits est de profondeur  $O(\ln(n)^i)$  avec une taille polynomiale.

**Question 6.** Montrer que pour tout  $i$  nous avons l'inégalité  $NC^i \subseteq AC^i \subseteq NC^{i+1}$ .

**Question 7.** Montrer que  $NC^0 \neq AC^0$ .

### 2.1 Classe TC

**Définition 5.** La classe  $TC^0$  correspond à la classe des problèmes de décision acceptés par une famille de circuits où les portes sont  $\neg$  ainsi que des portes de type  $T_k(x_1, \dots, x_n)$  avec  $T_k(x_1, \dots, x_n) = |\{i \mid x_i = \top\}| \geq k$

**Question 8.** Montrer que l'on peut faire les portes  $\wedge$ ,  $\vee$  et MAJORITÉ avec  $MAJORITÉ(x_1, \dots, x_n) = \top$  quand la moitié de ses entrées sont  $\top$  sans changer la profondeur de circuit.

**Question 9.** Montrer qu'à l'inverse  $TC^0$  correspond aussi à la classe des problèmes de décision acceptés par des circuits de profondeur bornée avec les portes  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  et MAJORITÉ (d'arités non bornées).

**Question 10.** Montrer  $TC^0 \subseteq NC^1$

**Question 11.** Montrer que le problème de parité est dans  $TC^0$ .

**Question 12.** Montrer que le problème de la multiplication est dans  $TC^0$ .