

## 1 Exemples de Machines de Turing

**Exercice 1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet de la bande (telle qu'elle est en entrée) avec  $\#$  marquant la fin du mot d'entrée. Donner des Machines de Turing pour les langages suivants :

- $L_1 = \{y \text{ rev}(y) \mid y \in \Sigma^*\}$
- $L_2 = \{yy \mid y \in \Sigma^*\}$
- $L^*$  pour  $L$  un langage récursivement énumérable reconnu par une machine de Turing  $M$  qui ne lit pas avant le premier caractère et efface le contenu de sa bande avant de terminer.

**Exercice 2.** On suppose que les entiers sont écrits en binaire. Les entrées sorties sont faites sur la bande qui contient  $k$  nombres. Pour  $k$  nombres, la bande est  $((0^*1^*)^*\#)^k$  ( $k$  fois des 0 et 1 suivis de  $\#$ ). Décrire des machines de Turing pour réaliser les opérations suivantes (à chaque fois la bande de fin doit contenir un nombre, c'est à dire des 0 et des 1 suivis de  $\#$ ) :

1. passer de petit-boutien à grand-boutien (et vice-versa) ;
2. calculer la somme de deux entiers ;
3. étant donnés deux machines  $M_1$  et  $M_2$  qui calculent deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , donner un machine qui calcule  $f_2 \circ f_1$ .

## 2 Stabilité des langages récursivement énumérables, décidables, etc.

Soient  $A, B$  des langages décidables et  $C$  et  $D$  des langages récursivement énumérables.

**Exercice 3.** Pour chacune des paires  $(X, Y)$  parmi  $(A, B)$ ,  $(B, C)$ ,  $(C, D)$  et  $(D, A)$  est-ce que  $L_{X, Y}$  est nécessairement décidable ou énumérable pour les langages suivants :

1.  $L_{X, Y} = X \cap Y$
2.  $L_{X, Y} = X \cup Y$
3.  $L_{X, Y} = X \setminus Y$

**Exercice 4.** Montrer que si  $X$  et  $\bar{X}$  sont énumérables alors  $X$  est décidable.

## 3 Machines de Turing exotiques

- Une machine à  $k$  piles est une machine de Turing avec une bande d'entrée et  $k$  bandes de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des piles ;
- une machine à file est une machine de Turing avec une bande d'entrée et une bande de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des files : on peut ajouter des éléments part la gauche et les lire par la droite ;
- une machine à  $k$  compteurs est une machine à  $k$  piles où l'alphabet de pile est  $\{B, Z\}$  et  $Z$  est un symbole de fond de pile. Un entier  $i$  peut-être stocké dans une pile en comptant le nombre de symboles  $B$ . On peut incrémenter, décrémenter le compteur et tester si le compteur est vide (symbole  $Z$  en tête de pile).

1. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux piles.
2. Montrer qu'une de Turing est équivalente à une machine à une file.
3. Montrer qu'une machine à une pile peut-être simulée par une machine à deux compteurs.
4. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux compteurs.