1 Rappels : les langages suivants sont-ils rationnels ? (Justifiez)

Exercice 1. $\mathcal{L}_0 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid (|w|_a = 0) \Rightarrow (|w|_b = 0)\}$

Exercice 2. $\mathcal{L}_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a < |w|_b\}$

Exercice 3. $\mathcal{L}_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid 7 \text{ divise } |w|_a, 3 \text{ divise } |w|_b, \}$

Exercice 4. $\mathcal{L}_3 = \{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ est bien parenthèsé}\}$

2 Non équivalence des lemmes de pompages

Voici trois lemmes de pompage pour un langage $\mathcal{L}$:

1	$\exists n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathcal{L} : \lvert u\rvert \geq n$	$\Rightarrow$	$\exists v,t,w \in \Sigma^*$	$u = vtw$	$\lvert t\rvert > 0$	$\forall m \in \mathbb{N}$	$vt^m w \in \mathcal{L}$
2	$\exists n \in \mathbb{N}, \forall rus \in \mathcal{L} : \lvert u\rvert \geq n$	$\Rightarrow$	$\exists v,t,w \in \Sigma^*$	$u = vtw$	$\lvert t\rvert > 0$	$\forall m \in \mathbb{N}$	$rvt^m ws \in \mathcal{L}$
3	$\exists n \in \mathbb{N}, \forall ru_1 \dots u_n s \in \mathcal{L}, \forall i : \lvert u_i\rvert \geq 1$	$\Rightarrow$	$\exists 1 \leq i < j \leq n$	$\forall m \in \mathbb{N}$	$ru_1 \dots u_{i-1}(u_i \dots u_j)^m u_{j+1} \dots u_n s \in \mathcal{L}$		

Exercice 5. Montrer que $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ vérifie le lemme 1 mais pas le lemme 2.

Exercice 6. Montrer que $\mathcal{L} = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^*(aa + bb + cc + dd + ac + bd)\Sigma^*$ vérifie le lemme 2 mais pas le lemme 3.

3 Algorithme de Brzozowski

Soit $\mathcal{L}_\Sigma$ un langage régulier sur l'alphabet Σ et soit $\mathcal{A} =< \mathcal{Q}, \Sigma, \delta, i, \mathcal{F} >$ un automate déterministe qui reconnaît $\mathcal{L}_\Sigma$ tel que tous les états de $\mathcal{A}$ soient accessibles depuis i.

Exercice 7. Montrer que $Rev(\mathcal{L}_\Sigma) = \{a_n \dots a_1 \mid a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}_\Sigma\}$ est reconnu par l'automate (non déterministe) $Rev(\mathcal{A}) =< \mathcal{Q}, \Sigma, \delta', \mathcal{F}, \{i\} >$ où $v \in \delta'(q,c) \Leftrightarrow \delta(v,c) = q$.

Definition 1. *Étant donné un automate non déterministe $\mathcal{B} =< \mathcal{Q}_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_\mathcal{B}, \mathcal{I}_\mathcal{B}, \mathcal{F}_\mathcal{B} >$ On note $Det(\mathcal{B})$ l'automate obtenu par la construction par sous-ensemble. On a $Det(\mathcal{B}) =< 2^{\mathcal{Q}_\mathcal{B}}, \Sigma, 2^{\delta_\mathcal{B}}, \mathcal{I}_\mathcal{B}, \{q \in 2^{\mathcal{Q}_\mathcal{B}} \mid q \cap \mathcal{F}_\mathcal{B} \neq \emptyset\} >$) avec $2^{\delta_\mathcal{B}}(e,v) = \bigcup_{q \in e} \delta_\mathcal{B}(q,v)$.*

Exercice 8. Montrer que dans $Det(\mathcal{B}) =< 2^{\mathcal{Q}_\mathcal{B}}, \Sigma, 2^{\delta_\mathcal{B}}, \mathcal{I}_\mathcal{B}, \{q \in 2^{\mathcal{Q}_\mathcal{B}} \mid q \cap \mathcal{F}_\mathcal{B} \neq \emptyset\} >$ on a : $q \in 2^{\tilde{\delta_\mathcal{B}}}(\mathcal{I}_\mathcal{B}, w_1 \dots w_n)$ équivalent à l'existence de $q_1, \dots, q_n, q_{n+1}$ avec $q_1 \in \mathcal{I}_\mathcal{B}$, $q_{n+1} = q$ et $q_{i+1} \in \delta_\mathcal{B}(q_i, w_i)$.

Definition 2. *On pose $leftEquiv(x,y) = \forall z : (zx \in \mathcal{L}_\Sigma) \Leftrightarrow (zy \in \mathcal{L}_\Sigma)$*

Exercice 9. Soit $Det(Rev(\mathcal{A})) =< \mathcal{Q}_d, \Sigma, \delta_d, i_d, \mathcal{F}_d >$. Montrer que pour tout $x, y \in (\Sigma^*)^2$ on a :

$$LeftEquiv(x,y) \Rightarrow (\tilde{\delta_d}(i_d, rev(x)) = \tilde{\delta_d}(i_d, rev(y)))$$

Exercice 10. En déduire à l'aide du théorème de Myhill–Nerode que $Det(Rev(\mathcal{L}_\Sigma))$ est l'automate minimal reconnaissant $Rev(\mathcal{L}_\Sigma)$.

Rappel : Étant donné un langage $\mathcal{L}$ on peut regarder la relation d'équivalence $RightEquiv(x,y) = \forall z : xz \in \mathcal{L} \Leftrightarrow yz \in \mathcal{L}$. Le théorème de Myhill–Nerode dit que tout automate reconnaissant le langage contient au moins autant d'états que le nombre de classes d'équivalence.

Exercice 11. En déduire une construction de l'automate minimal reconnaissant $\mathcal{L}_\Sigma$.

Exercice 12. Quelle est la complexité de cette construction ?