1 Lemme d'Arden

Exercice 1. Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des langages rationnels, montrez que si $\epsilon \notin \mathcal{A}$ alors $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ admet un unique langage $\mathcal{X}$ solution. Exprimez cette solution en fonction de a (resp. b) une expression régulière qui reconnaît $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

Conseil pour aborder cet exercice :

1. *trouvez une première solution et prouvez que c'en est bien une ;*
2. *prouvez que toute solution contient votre première solution ;*
3. *prouvez que votre première solution contient toute solution.*

2 Lemme de pompage (ou lemme de l'étoile)

Exercice 2. Les langages suivants sont-ils réguliers ? Justifiez.

1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n \mid n \equiv m \pmod d\}$ pour un $d \in \mathbb{N}$ donné.
3. $\{a^p \mid p \text{ premier }\}$
4. $\{a^{P(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour $P \in \mathbb{N}[X]$ donné.

3 Puzzles

Exercice 3. Soient x et y deux mots tels que $xy = yx$, que pouvez-vous dire de la forme de x et y ?

Exercice 4. Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{L}$ un langage régulier est-ce que $\frac{p}{q}\mathcal{L} = \left\{u \mid \exists v : uv \in \mathcal{L} \text{ et } |u| = \frac{p}{q}|uv|\right\}$ est nécessairement régulier ?

4 Lemme d'Arden généralisé

Definition 1. *Un monoïde est une structure algébrique* $(E, \bigodot, e)$ *telle que :*
(loi interne) Pour $x, y \in E^2$, $x \bigodot y \in E$
(associative) Pour $x, y, z \in E^3$, $(x \bigodot y) \bigodot z = x \bigodot (y \bigodot z)$
(élément neutre) Pour $x \in E$, $x \bigodot e = e \bigodot x = x$

Definition 2. *Un demi-anneau est une structure algébrique* $(E, +, \times, 0, 1)$ *telle que :*
- $(E, +, 0)$ *est un monoïde commutatif* $(a + b = b + a)$ *;*
- $(E, \times, 1)$ *est un monoïde ;*
- $\times$ *est distributif pour* $+$ $(a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *et* $(b + c) \times a = b \times a + c \times a)$ *;*
- 0 *est absorbant pour* $\times$ *(i.e.* $0 \times a = a \times 0 = 0$*)*

Exercice 5. Remarquez que $(\mathcal{L}_\Sigma, \cup, /, \emptyset, \epsilon)$ est un demi-anneau où :
- $\mathcal{L}_\Sigma$ est l'ensemble des langages réguliers sur l'alphabet fini Σ ;
- $/$ est la concaténation $X/Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$;
- $\cup$ est l'union ;
- $\emptyset$ est le langage vide ;
- ϵ est le langage contenant uniquement le mot vide.

Soit $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$ l'ensemble des matrices carrés de taille n sur le demi-anneau $(\mathcal{L}_\Sigma, /, \cup, \emptyset, \epsilon)$ avec
- $(M + N)_{i,j} = M_{i,j} \cup N_{i,j}$;
- $(M \times N)_{i,j} = \bigcup_{1 \le k \le n} M_{i,k}/N_{k,j}$;

— $0_{i,j} = \emptyset$
— $1_{i,j} = \begin{cases} \epsilon & i = j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
— $M^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} M^i$

Remarquez que $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$ est aussi un demi-anneau.

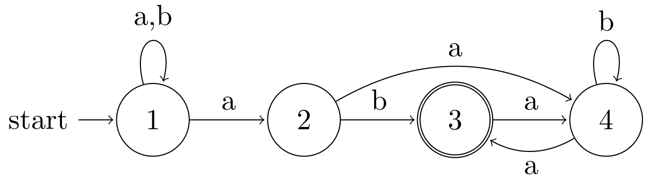
Note : Tout demi-anneau peut se transformer de la même manière en un demi-anneau de matrices.

Exercice 6. Soit $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$ avec $\forall i, j\ \epsilon \notin A_{i,j}$ et $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ un vecteur de taille n montrez qu'il n'existe qu'une unique solution $\mathcal{X} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ à $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ (i.e. $\forall i : \mathcal{X}_i = \left(\bigcup_j\ \mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{X}_j\right) \cup \mathcal{B}_i$).

Exercice 7. *(Pivot de Gauss)* Étant donné $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$ et $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ montrez que si $n > 1$ les langages $(\mathcal{A}^*\mathcal{B})_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\mathcal{A}'^*\mathcal{B}'$ pour $\mathcal{A}' \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma), \mathcal{B}' \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$.

Exercice 8. En déduire un algorithme permettant de retrouver une expression régulière à partir d'un automate.

Exercice 9. Donner l'expression régulière pour l'automate suivant :



5 Monoïde d'un langage

Definition 3. *Étant donné un alphabet ambiant Σ et un langage $\mathcal{L}$ (pas nécessairement régulier) on note $\mu_\mathcal{L}$ le morphisme syntaxique de $\mathcal{L}$ définit ainsi : $\mu_\mathcal{L}(u) = \{(x, y) \in \Sigma^{*2} \mid xuy \in \mathcal{L}\}$.*

Exercice 10. Montrer que $\mu_\mathcal{L}$ est compatible avec la concaténation c'est à dire $\forall u, v, w : \mu_\mathcal{L}(v) = \mu_\mathcal{L}(w) \Rightarrow (\mu_\mathcal{L}(vu) = \mu_\mathcal{L}(wu)) \wedge (\mu_\mathcal{L}(uv) = \mu_\mathcal{L}(uw))$.

Exercice 11. Pour chaque élément $e \in \mu_\mathcal{L}(\Sigma^*)$ on choisit un représentant $r(e)$ tel que $\mu_\mathcal{L}(r(e)) = e$, et on définit $u \odot v = \mu_\mathcal{L}(r(u)) \odot \mu_\mathcal{L}(r(v)) = \mu_\mathcal{L}(r(u)r(v))$.

Justifier que :
— $\odot$ ne dépend pas du choix de r.
— la structure $(\mu_\mathcal{L}(\Sigma^*), \odot, \mu_\mathcal{L}(\epsilon))$ induite par $\mu_\mathcal{L}$ est bien un monoïde

et donc $\mu_\mathcal{L}$ est bien un morphisme entre le monoïde libre sur Σ et le monoïde induit par $\mu_\mathcal{L}$.

Note : tout monoïde $(M, \odot, e)$ compatible avec une fonction μ induit une structure de monoïde sur $\mu(M)$.

Exercice 12. Montrer que $\mu_\mathcal{L}(\Sigma^*)$ est fini quand $\mathcal{L}$ est régulier.

Exercice 13. Montrer que si $\mu_\mathcal{L}(\Sigma^*)$ est fini alors $\mathcal{L}$ est régulier.

Exercice 14. À quoi ressemble le monoïde syntaxique des mots bien parenthèsés ?