

1 Lemme d'Arden

Exercice 1. Soit \mathcal{A} , \mathcal{B} des langages rationnels, montrez que si $\epsilon \notin \mathcal{A}$ alors $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ admet un unique langage \mathcal{X} solution. Exprimez cette solution en fonction de a (resp. b) une expression régulière qui reconnaît \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}).

Conseil pour aborder cet exercice :

1. trouvez une première solution et prouvez que c'en est bien une ;
2. prouvez que toute solution contient votre première solution ;
3. prouvez que votre première solution contient toute solution.

Solution 1. Nous allons montrer que l'unique solution est $\mathcal{A}^*\mathcal{B} = \{a_1 \dots a_n b \mid (a_i) \in \mathcal{A}^*, b \in \mathcal{B}\}$ ou en forme d'expression régulière a^*b .

$\mathcal{A}^*\mathcal{B}$ est une solution : $\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{B} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{B}$.

Montrons par récurrence sur la taille des mots de \mathcal{X} que toute solution est incluse dans a^*b .

Soit $x \in \mathcal{X}$ on a soit $x \in \mathcal{B}$ soit $x \in \mathcal{A}\mathcal{X}$. Si $x \in \mathcal{B}$, le résultat est clair. Si $x \in \mathcal{A}\mathcal{X}$ nous avons $a \in \mathcal{A}$ et $x' \in \mathcal{X}$ tels que $x = ax'$. Comme $|a| > 0$, $|x'| < |x|$ et donc par récurrence on a x' dans a^*b donc x aussi.

Enfin toute solution \mathcal{X} contient \mathcal{B} et est stable par concaténation gauche de \mathcal{A} donc a^*b est contenue dans cette solution.

2 Lemme de pompage (ou lemme de l'étoile)

Exercice 2. Les langages suivants sont-ils réguliers ? Justifiez.

1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n \mid n \equiv m \pmod{d}\}$ pour un $d \in \mathbb{N}$ donné.
3. $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$
4. $\{a^{P(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour $P \in \mathbb{N}[X]$ donné.

Solution 2.

1. Non, d'après le lemme de pompage pour m suffisamment grand on a $a^m b^m$ qui se décomposerait en uvw avec $uv^k w$ dans le langage. Si v panache a et b alors le $uv^2 w$ alterne a et b et si w ne contient que a ou que b il y a déséquilibre entre les nombres de a et b .
2. Oui, c'est l'union pour $k = 0, \dots, d-1$ des langages $L_k = (a^k (a^d)^* b^k (b^d)^*)$
3. Non, si pour p suffisamment grand on a a^p implique une décomposition $a^p = uvw$ avec $uv^x w$ dans le langage pour tout x . Si $v = a^d$ on a $a^p + x \times d$ pour tout d or $p + x \times d$ n'est pas premier pour $x = p$ ($p + pd = (d+1)p$).
4. Par lemme de pompage on a pour n assez grand $a^{P(n)}$ décomposable en uvw avec $|v| > 0$ et $uv^k w$ dans le langage pour tout k . Donc il existe k et d tel que $a^{k \times x + d}$ pour tout x . Ce n'est pas vrai si P est du second degré ou plus (l'écart $P(n+1) - P(n)$ tend vers l'infini). En revanche si P est du premier degré ça marche, pour $P(X) = BX + C$ on a l'expression $(a^B)^* a^{C \% B}$.

3 Puzzles

Exercice 3. Soient x et y deux mots tels que $xy = yx$, que pouvez-vous dire de la forme de x et y ?

Solution 3. Montrons par récurrence sur $|y| + |x|$ qu'il existe w tel que $x = w^n$ et $y = w^m$ pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

Si $|x| = |y|$, on a $x = y$ alors $w = x = y$ avec $n = m = 1$ convient.

Sinon on a $xy = yx$ donc on peut trouver z tel que $y = xz$. On a alors $xxz = xzx$ et donc $xz = zx$. Par récurrence on obtient $x = w^n$, $z = w^m$ et donc $y = w^{m+n}$

Exercice 4. Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^*$, et \mathcal{L} un langage régulier est-ce que $\frac{p}{q}\mathcal{L} = \left\{ u \mid \exists v : uv \in \mathcal{L} \text{ et } |u| = \frac{p}{q}|uv| \right\}$ est nécessairement régulier ?

Solution 4. Oui, nous allons présenter l'automate pour $p \leq q$ et $\text{gcd}(p, q) = 1$ (les autres cas sont triviaux). L'idée c'est que $|u| = \frac{p}{q}|uv|$ est équivalent à $q|u| = p|uv|$ ou $(q - p)|u| = p|v|$. De la même manière que pour $\frac{1}{2}\mathcal{L}$ où à chaque fois que l'on lit une lettre, on avance d'une lettre en partant de la fin (voir TD de la semaine dernière), ici en lisant p lettres de u on note que l'on avance de $q - p$ lettres dans l'automate en partant de la fin.

Soit $\langle \Sigma, \mathcal{Q}, \delta, i, \mathcal{F} \rangle$ un automate déterministe qui reconnaît \mathcal{L} notre automate est : $\langle \Sigma, \mathcal{Q} \times \{0, 1, \dots, p - 1\} \times 2^{\mathcal{Q}}, \eta, (i, 0, \mathcal{F}), \{(e, 0, f) \mid f \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\} \rangle$ Un état (e, l, f) stocke l'état e obtenu par l'automate initial, le nombre l de lettres lues modulo q et les états $g \in f$ tels qu'il existe un mot de taille $\lfloor \frac{p}{q}l \rfloor$ qui mène de g à un état de \mathcal{F} .

Les transitions sont donc $\eta((e, p - 1, f), c) = (\delta(e, c), 0, \{g \mid \exists h \in f, v : |v| = p - q \text{ et } \tilde{\delta}(h, v) = g\})$ et $\eta((e, l, f), c) = (\delta(e, c), l + 1, f)$ si $l < q - 1$.

4 Lemme d'Arden généralisé

Definition 1. Un monoïde est une structure algébrique (E, \odot, e) telle que :

- (loi interne) Pour $x, y \in E^2$, $x \odot y \in E$
- (associative) Pour $x, y, z \in E^3$, $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
- (élément neutre) Pour $x \in E$, $x \odot e = e \odot x = x$

Definition 2. Un demi-anneau est une structure algébrique $(E, +, \times, 0, 1)$ telle que :

- $(E, +, 0)$ est un monoïde commutatif ($a + b = b + a$);
- $(E, \times, 1)$ est un monoïde;
- \times est distributif pour $+$ ($a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ et $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$);
- 0 est absorbant pour \times (i.e. $0 \times a = a \times 0 = 0$)

Exercice 5. Remarquez que $(\mathcal{L}_\Sigma, \cup, /, \emptyset, \epsilon)$ est un demi-anneau où :

- \mathcal{L}_Σ est l'ensemble des langages réguliers sur l'alphabet fini Σ ;
- $/$ est la concaténation $X/Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$;
- \cup est l'union;
- \emptyset est le langage vide;
- ϵ est le langage contenant uniquement le mot vide.

Soit $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$ l'ensemble des matrices carrés de taille n sur le demi-anneau $(\mathcal{L}_\Sigma, /, \cup, \emptyset, \epsilon)$ avec

- $(M + N)_{i,j} = M_{i,j} \cup N_{i,j}$;
- $(M \times N)_{i,j} = \bigcup_{1 \leq k \leq n} M_{i,k} / N_{k,j}$;
- $0_{i,j} = \emptyset$
- $1_{i,j} = \begin{cases} \epsilon & i = j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
- $M^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} M^i$

Remarquez que $(M_n(\mathcal{L}_\Sigma), +, \times, 0, 1)$ est aussi un demi-anneau.

Note : Tout demi-anneau peut se transformer de la même manière en un demi-anneau de matrices.

Exercice 6. Soit $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$ avec $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : \mathcal{A}_{i,j} = \emptyset$ et $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ un vecteur de taille n montrez qu'il n'existe qu'une unique solution $\mathcal{X} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ à $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ (i.e. $\forall i : \mathcal{X}_i = (\bigcup_j \mathcal{A}_{i,j}\mathcal{X}_j) \cup \mathcal{B}_i$).

Solution 6.

L'unique solution est $\mathcal{A}^*\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{A}^n\mathcal{B}$. En effet, c'est une solution, et toutes les solutions doivent contenir \mathcal{B} et être stables par concaténation gauche de \mathcal{A} donc toutes les solutions contiennent $\mathcal{A}^*\mathcal{B}$ et par conséquent pour tout j , une solution \mathcal{X} est telle que $(\mathcal{A}^*\mathcal{B})_j \subseteq \mathcal{X}_j$.

Maintenant soit \mathcal{X} une solution avec $\mathcal{X} \neq \mathcal{A}^*\mathcal{B}$, soient j et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ tels que $|x_j|$ est minimal et $x_j \in \mathcal{X}_j \setminus (\mathcal{A}^*\mathcal{B})_j$. $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ donc comme par définition $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{X}_j$ il existe $a_{j,i}x_i$ et $x_i \in \mathcal{X}_i$. Comme $|x_j|$ est minimal et $|a_{i,j}| > 0$ on a $x_i \in \mathcal{A}^*\mathcal{B}$ mais alors $x_j \in (\mathcal{A}^*\mathcal{B})_j$ ce qui est contradictoire.

Exercice 7. (*Pivot de Gauss*) Étant donné $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma)$ et $\mathcal{B} \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$ montrez que si $n > 1$ les langages $(\mathcal{A}^*\mathcal{B})_i$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\mathcal{A}'^*\mathcal{B}'$ pour $\mathcal{A}' \in M_n(\mathcal{L}_\Sigma), \mathcal{B}' \in M_{n,1}(\mathcal{L}_\Sigma)$.

Solution 7. On a $\mathcal{X}_n = \bigcup_j \mathcal{A}_{n,i}\mathcal{X}_i \cup \mathcal{B}_n$ donc $\mathcal{X}_n = \bigcup_j \mathcal{A}_{n,i}\mathcal{X}_i (\mathcal{A}_{n,n}\mathcal{X}_n \cup \mathcal{B}_n)$ donc $\mathcal{X}_n = \mathcal{A}_{n,n}^* (\mathcal{B}_n \cup \bigcup_j \mathcal{A}_{n,i}\mathcal{X}_i)$.

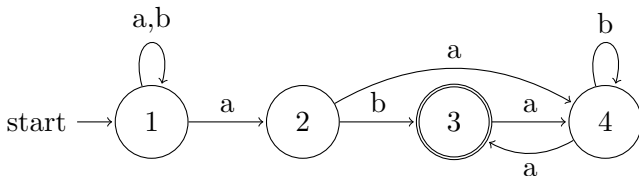
On avait $\mathcal{X}_i = \bigcup_j \mathcal{A}_{i,j}\mathcal{X}_j$ on a $\mathcal{X}_i = \bigcup_{j < n} \mathcal{A}_{i,j}\mathcal{X}_j \cup \mathcal{A}_{i,n}(\mathcal{A}_{n,n}^*\mathcal{B}_n \cup \bigcup_j \mathcal{A}_{n,n}\mathcal{A}_{n,j}\mathcal{X}_j) \cup \mathcal{B}_i$ donc nous avons $\mathcal{X}_i = \bigcup_{j < n} (\mathcal{A}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,n}\mathcal{A}_{n,n}^*\mathcal{A}_{n,j})\mathcal{X}_j \cup (\mathcal{B}_i \cup \mathcal{A}_{i,n}\mathcal{A}_{n,n}^*\mathcal{B}_n)$.

En posant $\mathcal{A}'_{i,j} = \mathcal{A}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,n}\mathcal{A}_{n,n}^*\mathcal{A}_{n,j}$ et $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_i \cup \mathcal{A}_{i,n}\mathcal{A}_{n,n}^*\mathcal{B}_n$ nous avons bien le résultat escompté.

Exercice 8. En déduire un algorithme permettant de retrouver une expression régulière à partir d'un automate.

Solution 8. Un automate $\langle \Sigma, \mathcal{Q}, \delta, i, \mathcal{F} \rangle$ peut être vu comme un système d'équations avec $A_{i,j} = c_1 | \dots | c_k$ où les c_l sont tels que $q_j \in \delta(q_i, c_l)$ et $B_i = \begin{cases} \epsilon & q_i \in \mathcal{F} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$. À partir de là on applique simplement le pivot de Gauss jusqu'à obtenir une seule équation correspond à l'état initial $\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ et la solution est $\mathcal{A}^*\mathcal{B}$.

Exercice 9. Donner l'expression régulière pour l'automate suivant :



Solution 9.

(a b)	a	\emptyset	\emptyset	\emptyset
\emptyset	\emptyset	b	a	\emptyset
\emptyset	\emptyset	\emptyset	a	ϵ
\emptyset	\emptyset	a	b	\emptyset

(a b)	a	\emptyset	\emptyset
\emptyset	\emptyset	b (ab*a)	\emptyset
\emptyset	\emptyset	ab*a	ϵ

(a b)	a	\emptyset
\emptyset	\emptyset	(b (ab*a))(ab*a)*

(a b)	a(b (ab*a))(ab*a)*
-------	--------------------

Le langage est donc $(a|b)^*a(b|(ab^*a))(ab^*a)^*$

5 Monoïde d'un langage

Definition 3. Étant donné un alphabet ambiant Σ et un langage \mathcal{L} (pas nécessairement régulier) on note $\mu_{\mathcal{L}}$ le morphisme syntaxique de \mathcal{L} définit ainsi : $\mu_{\mathcal{L}}(u) = \{(x, y) \in \Sigma^{*2} \mid xuy \in \mathcal{L}\}$.

Exercice 10. Montrer que $\mu_{\mathcal{L}}$ est compatible avec la concaténation c'est à dire $\forall u, v, w : \mu_{\mathcal{L}}(v) = \mu_{\mathcal{L}}(w) \Rightarrow (\mu_{\mathcal{L}}(vu) = \mu_{\mathcal{L}}(wu)) \wedge (\mu_{\mathcal{L}}(uv) = \mu_{\mathcal{L}}(uw))$.

Solution 10. Soient u, v, w avec $\mu_{\mathcal{L}}(w) = \mu_{\mathcal{L}}(v)$ on a $(x, y) \in \mu_{\mathcal{L}}(vu)$ équivalent $xvuy \in \mathcal{L}$ donc $(x, uy) \in \mu_{\mathcal{L}}(v) = \mu_{\mathcal{L}}(w)$ donc $(x, y) \in ml(wu)$ et donc $\mu_{\mathcal{L}}(vu) \subseteq \mu_{\mathcal{L}}(wu)$. Tous les autres cas sont parfaitement symétriques donc on obtient le résultat voulu.

Exercice 11. Pour chaque élément $e \in \mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$ on choisit un représentant $r(e)$ tel que $\mu_{\mathcal{L}}(r(e)) = e$, et on définit $u \odot v = \mu_{\mathcal{L}}(r(u)) \odot \mu_{\mathcal{L}}(r(v)) = \mu_{\mathcal{L}}(r(u)r(v))$.

Justifier que :

— \odot ne dépend pas du choix de r .

— la structure $(\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*), \odot, \mu_{\mathcal{L}}(\epsilon))$ induite par $\mu_{\mathcal{L}}$ est bien un monoïde

et donc $\mu_{\mathcal{L}}$ est bien un morphisme entre le monoïde libre sur Σ et le monoïde induit par $\mu_{\mathcal{L}}$.

Note : tout monoïde (M, \odot, e) compatible avec une fonction μ induit une structure de monoïde sur $\mu(M)$.

Solution 11.

— Soient r et r' , d'après la question précédente on a : $u \odot_r v = \mu(r(u)) \odot_r \mu(r(v)) = \mu(r(u)r(v)) = \mu(r'(u)r'(v)) = \mu(r'(u)r'(v)) = u \odot_{r'} v$

— \odot est bien une loi interne, montrons son associativité : $(x \odot y) \odot z = (r(x) \odot r(y)) \odot r(z) = \mu_{\mathcal{L}}(r(\mu_{\mathcal{L}}(xy))r(z))$ mais $\mu_{\mathcal{L}}(r(\mu_{\mathcal{L}}(xy))z) = \mu_{\mathcal{L}}(xyz)$ car $\mu_{\mathcal{L}}(xy) = \mu_{\mathcal{L}}(r(\mu_{\mathcal{L}}(xy)))$. De la même manière on a $x \odot (y \odot z) = \mu_{\mathcal{L}}(xyz)$. Enfin $\mu_{\mathcal{L}}(r(x)r(\mu_{\mathcal{L}}(\epsilon))) = \mu_{\mathcal{L}}(r(x)) = \mu_{\mathcal{L}}(r(\mu_{\mathcal{L}}(\epsilon))r(x))$ donc $\mu_{\mathcal{L}}(\epsilon)$ est bien associatif.

Exercice 12. Montrer que $\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$ est fini quand \mathcal{L} est régulier.

Solution 12. Si \mathcal{L} est régulier, il existe un automate déterministe fini complet $\langle \Sigma, \mathcal{Q}, \delta, i, \mathcal{F} \rangle$ qui reconnaît \mathcal{L} . Pour un u donné on pose $t(u) = \{(p, \tilde{\delta}(p, u)) \in \mathcal{Q}^2 \mid q \in \tilde{\delta}(p, u)\}$ montrons que $t(u) = t(v)$ implique $\mu_{\mathcal{L}}(u) = \mu_{\mathcal{L}}(v)$. Par symétrie, montrons juste que $\mu_{\mathcal{L}}(u) \subseteq \mu_{\mathcal{L}}(v)$.

Soient $u, v, x, y \in \Sigma^{*2}$ et $(x, y) \in \mu_{\mathcal{L}}(u)$ on a $xuy \in L_{\mathcal{L}}$ donc $\tilde{\delta}(i, xuy) \in \mathcal{F}$ mais $\tilde{\delta}(i, xuy) = \tilde{\delta}(q_x, uy)$ avec $q_x = \tilde{\delta}(i, x)$. Donc $\tilde{\delta}(i, xuy) = \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(q_x, u), y) = \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(q_x, v), y) = \tilde{\delta}(i, xvy)$ et donc $xvy \in \mathcal{L}$.

Exercice 13. Montrer que si $\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*)$ est fini alors \mathcal{L} est régulier.

Solution 13. Si $\mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*) = \{q_1, \dots, q_n\}$ on pose $i = \mu_{\mathcal{L}}(\epsilon)$, $\delta(q_i, c) = q_i \odot \mu_{\mathcal{L}}(c)$ et $\mathcal{F} = \{q \in \mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*) \mid (\epsilon, \epsilon) \in q\}$ et alors $\langle \Sigma, \mu_{\mathcal{L}}(\Sigma^*), \delta, i, \mathcal{F} \rangle$ est un automate qui reconnaît \mathcal{L} .

Exercice 14. À quoi ressemble le monoïde syntaxique des mots bien parenthésés ?

Solution 14. À \mathbb{Z}^2 : un mot est envoyé sur $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ quand il ferme x parenthèses ouvertes avant lui et laisse ouvertes y parenthèses et on a la loi $(x, y) \odot (w, z) = (x + \max(w - y, 0), z + \max(y - w, 0))$.