Vous pouvez répondre dans l'ordre qui vous sied mais indiquez à chaque fois le numéro de la question à laquelle vous répondez. Les questions sont grossièrement triées par difficulté exceptées celles précédées du symbole ★.

1 Langages universels et limites temporelles

Pour chacun des langages suivants, le placer dans la classe de complexité la plus basse à laquelle il appartient.

(a) $L := \{(M, x) : M(x) \text{ s'arrête}\}$
(b) $L := \{M : \exists x\ M(x) \text{ s'arrête}\}$
(c) $L := \{(M, x, t) : M(x) \text{ s'arrête en moins de } t \text{ étapes}\}$
(d) $L := \{(M, t) : \exists x\ M(x) \text{ s'arrête en moins de } t \text{ étapes}\}$
(e) $L := \{(M, t) : \forall x\ M(x) \text{ s'arrête en moins de } t \text{ étapes}\}$
(f) $L := \{(M, 1^t) : \forall x\ M(x) \text{ s'arrête en moins de } t \text{ étapes}\}$

Parmi ces langages, lesquels sont complets parmi leur classe? Justifier rapidement vos réponses.

2 Relations entre classes

Supposons pour cet exercice que $\mathbf{P} = \mathbf{PSPACE}$. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai, faux ou si c'est une question ouverte. Dans les cas vrai et faux, donner une courte justification.

(a) $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$
(b) $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$
(c) $\mathbf{P} = \mathbf{L}$
(d) $\mathbf{NP} = \mathbf{EXP}$
(e) $\mathbf{NP} = \mathbf{L}$
(f) $\mathbf{NPSPACE} = \mathbf{P}$

3 L'étoile de Kleene

L'étoile de Kleene d'un langage L est le langage

$$L^\star := \{x_1 \cdots x_k : k \geq 0 \text{ et } x_1, \ldots, x_k \in L\} .$$

C'est à dire, $L^\star$ est constitué des chaînes formées en concaténant un nombre fini d'éléments de L.

(a) Montrer que **NP** est clos par étoile.
(b) Montrer que **P** est clos par étoile.

4 Variantes de PCP

Déterminer quels sont les variantes de PCP décidables parmi les suivantes :

(a) PCP sur un alphabet unaire.
(b) PCP sur un alphabet binaire.
★(c) PCP (sur un alphabet quelconque) mais où l'on s'intéresse à l'existence d'une suite *infinie* $i_1, i_2, \ldots$ telle que $t_{i_1} t_{i_2} \cdots = b_{i_1} b_{i_2} \cdots$, où $\{(t_i, b_i)\}_{i=1}^n$ est un ensemble fini de tuiles donné.

5 Aléa et non déterminisme

Un langage L est dans $\mathbf{BP} \cdot \mathbf{NP}$ s'il existe une machine M déterministe et de temps polynomial telle que :

$$x \in L \implies \Pr_{r \in \{0,1\}^{m(n)}} \left[\exists y \in \{0,1\}^{k(n)} \; M(x, y; r) = 1 \right] \geq 2/3$$
$$x \notin L \implies \Pr_{r \in \{0,1\}^{m(n)}} \left[\exists y \in \{0,1\}^{k(n)} \; M(x, y; r) = 1 \right] \leq 1/3$$

où $m(n), k(n) \leq \mathrm{poly}(n)$. Un langage L est dans $\mathbf{NP} \cdot \mathbf{BP}$ s'il existe une machine déterministe de temps polynomial M telle que :

$$x \in L \implies \exists y \in \{0,1\}^{k(n)} \Pr_{r \in \{0,1\}^{m(n)}} [M(x, y; r) = 1] \geq 2/3$$
$$x \notin L \implies \forall y \in \{0,1\}^{k(n)} \Pr_{r \in \{0,1\}^{m(n)}} [M(x, y; r) = 1] \leq 1/3$$

où $m(n), k(n) \leq \mathrm{poly}(n)$. Montrer que :

$$\mathbf{NP} \cdot \mathbf{BP} \subseteq \mathbf{BP} \cdot \mathbf{NP} \; .$$

6 Séparation par clôture

Pour un langage $L \subseteq \Sigma^\star$ est une fonction $f : \Sigma^\star \longrightarrow \Sigma^\star$, on pose

$$L_f := \{x \in \Sigma^\star : f(x) \in L\} \; .$$

On dit qu'une classe de complexité est *close par composition (polynomiale)* quand pour chaque L de la classe et chaque fonction f calculable en temps polynomial, alors le langage L_f est aussi dans cette classe.

Pour un langage A, on note $A^\sharp := \{x0^{|x|^2 - |x|} : x \in A\}$ le langage constitué d'éléments $x \in A$ suivis de $|x|^2 - |x|$ zéros.

(a) Montrer que $\mathbf{NP}$ est clos par composition.
(b) Montrer que si $A \in \mathbf{SPACE}(n^2)$ alors $A^\sharp \in \mathbf{SPACE}(n)$.
(c) Montrer que $\mathbf{SPACE}(n)$ n'est *pas* clos par composition.
(d) En déduire que $\mathbf{NP} \neq \mathbf{SPACE}(n)$.

7 NP-Complétude

PARTITION EN CLIQUE (CLIQUE-COVER) est le problème suivant :

ENTRÉE : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $K \leq |V|$;

QUESTION : Peut-on trouver une partition de taille $k \leq K$ des sommets de G en $V_1, \ldots, V_k$ telle que pour que chaque $i = 1, \ldots, k$ le sous-graphe composé des nœuds de V_i forme un graphe complet ?

Montrer que PARTITION EN CLIQUE est $\mathbf{NP}$-complet.

8 Question bonus : Espace temps

Montrer qu'il existe une fonction $T(n) \geq n$ telle que $\mathbf{DTIME}(T(n)) = \mathbf{DSPACE}(T(n))$.